ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $5^η$ ΔΕΚΑΔΑ

41.

Να αποδείξετε ότι

α) $\dfrac{ημx}{συνx} + \dfrac{συνx}{ημx} = \dfrac{1}{ημxσυνx}$

β) $\left(1+\dfrac{συνx}{ημx}\right)(\,1 + εφx) = \dfrac{1}{ημxσυνx} + 2$

γ) $\dfrac{1-εφ^2x}{1+εφ^2x} = 2συν^2x - 1$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{ημx}{συνx} + \frac{συνx}{ημx} = \frac{ημ^2x}{συνxημx} + \frac{συν^2x}{ημxσυνx} = \frac{ημ^2x + συν^2x}{συνxημx} = \frac{1}{ημxσυνx}$$

β)

$$\left(1+\frac{συνx}{ημx}\right)(\,1 + εφx) = \left(1+\frac{συνx}{ημx}\right)\left(1+\frac{ημx}{συνx}\right) = \left(\frac{ημx}{ημx}+\frac{συνx}{ημx}\right)\left(\frac{συνx}{συνx}+\frac{ημx}{συνx}\right) =$$

$$= \left(\frac{ημx + συνx}{ημx}\right)\left(\frac{ημx + συνx}{συνx}\right) =$$

$$= \frac{(ημx + συνx)^2}{ημxσυνx} =$$

$$= \frac{ημ^2x + συμ^2x + 2ημxσυνx}{ημxσυνx} =$$

$$= \frac{1 + 2ημxσυνx}{ημxσυνx} =$$

$$= \frac{1}{ημxσυνx} + \frac{2ημxσυνx}{ημxσυνx} =$$

$$= \frac{1}{ημxσυνx} + 2$$

γ)

$$\frac{1-εφ^2x}{1+εφ^2x} = \frac{1-\dfrac{ημ^2x}{συν^2x}}{1+\dfrac{ημ^2x}{συν^2x}} = \frac{\dfrac{συν^2x}{συν^2x}-\dfrac{ημ^2x}{συν^2x}}{\dfrac{συν^2x}{συν^2x}+\dfrac{ημ^2x}{συν^2x}} = \frac{\dfrac{συν^2x-ημ^2x}{συν^2x}}{\dfrac{συν^2x+ημ^2x}{συν^2x}} =$$

$$= \frac{συν^2x-ημ^2x}{συν^2x+ημ^2x} =$$

$$= \frac{συν^2x-ημ^2x}{1} =$$

$$= συν^2x - (1-συν^2x) =$$

$$= 2συν^2x-1$$

42 .

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \left(\sqrt{1+\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{15+\sqrt{100}}}}}\right)\cdot\sqrt{18}$$

β) Αν $K = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ και $\Lambda = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις K^2 και Λ^2

ii) Να δείξετε ότι οι αριθμοί K^2 και Λ^2 είναι αντίστροφοι

Προτεινόμενη λύση

α)

$$A = \left(\sqrt{1+\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{15+\sqrt{100}}}}}\right)\cdot\sqrt{18} = \left(\sqrt{1+\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{15+10}}}}\right)\cdot\sqrt{18} =$$

$$= \left(\sqrt{1+\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{25}}}}\right)\cdot\sqrt{18}$$

$$= \left(\sqrt{1+\sqrt{43+\sqrt{31+5}}}\right)\cdot\sqrt{18}$$

$$= \left(\sqrt{1+\sqrt{43+\sqrt{36}}}\right)\cdot\sqrt{18}$$

$$= \left(\sqrt{1+\sqrt{43+6}}\right)\cdot\sqrt{18} =$$

$$= \left(\sqrt{1+\sqrt{49}}\right)\cdot\sqrt{18} =$$

$$= \left(\sqrt{1+7}\right)\cdot\sqrt{18} =$$

$$= \sqrt{8}\cdot\sqrt{18} =$$

$$= \sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2} =$$

$$= 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} = 6(\sqrt{2})^2 = 6\cdot 2 = 12$$

β)

i. $K^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

$\Lambda^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$

ii. $K^2\cdot\Lambda^2 = (5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 25 - 4(\sqrt{6})^2 = 25 - 24 = 1$

Άρα οι αριθμοί K^2 και Λ^2 είναι αντίστροφοι

43 .

α) Να γίνουν γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα
$P(x) = (x^2 - 9)^2 - (x + 5)(x - 3)^2$ και $Q(x) = x(x - 6)(x + 4) + 9x + 36$

β) Αφού βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται το κλάσμα $\frac{P(x)}{Q(x)}$ και να απλοποιηθεί αυτό.

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} P(x) = (x^2 - 9)^2 - (x + 5)(x - 3)^2 &= (x - 3)^2(x + 3)^2 - (x + 5)(x - 3)^2 = \\ &= (x - 3)^2[(x + 3)^2 - (x + 5)] = \\ &= (x - 3)^2(x^2 + 6x + 9 - x - 5) = \\ &= (x - 3)^2(x^2 + 5x + 4) = \\ &= (x - 3)^2(x + 1)(x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) = x(x - 6)(x + 4) + 9x + 36 &= x(x - 6)(x + 4) + 9(x + 4) = \\ &= (x + 4)[x(x - 6) + 9] = \\ &= (x + 4)(x^2 - 6x + 9) = \\ &= (x - 3)^2(x + 4) \end{aligned}$$

β)

Για να ορίζεται το κλάσμα πρέπει $Q(x) \neq 0$ δηλαδή $(x - 3)^2(x + 4) \neq 0$ άρα
$x \neq 3$ και $x \neq -4$

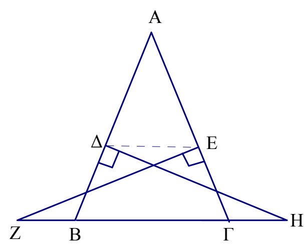
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-3)^2(x+1)(x+4)}{(x-3)^2(x+4)} = x + 1$$

44.

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = A\Gamma$, $BZ = \Gamma H$, $ZE \perp A\Gamma$ και $H\Delta \perp AB$. Να αποδείξετε ότι

α) $\Delta H = ZE$

β) Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές



Προτεινόμενη λύση

α)

Αφού $BZ = \Gamma H$ θα είναι και $BH = \Gamma Z$ ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

Ακόμα $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$, ως προσκείμενες στην βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΗ και ΕΓΖ είναι ίσα.

Άρα $\Delta H = ZE$ ως αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων

β)

Από την ισότητα των προηγουμένων τριγώνων είναι $B\Delta = \Gamma E$.

Και επειδή $AB = A\Gamma$, θα είναι $A\Delta = AE$ ως διαφορές ίσων ευθυγράμμων τμημάτων. Επομένως το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

45.

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7}-\dfrac{9x-y}{4}=-8 \\ 2y-3x-\dfrac{3x-2y}{3}=4 \end{cases}$

β) Αν (x , y) = (5 , 9) είναι η λύση του συστήματος, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο (5 , 9) και είναι παράλληλη προς τον άξονα των x

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{7}-\dfrac{9x-y}{4}=-8 \\ 2y-3x-\dfrac{3x-2y}{3}=4 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} 28\cdot\dfrac{x+2}{7}-28\cdot\dfrac{9x-y}{4}=-8\cdot 28 \\ 3\cdot 2y-3\cdot 3x-3\cdot\dfrac{3x-2y}{3}=3\cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\cdot(x+2)-7\cdot(9x-y)=-224 \\ 6y-9x-(3x-2y)=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+8-63x+7y=-224 \\ 6y-9x-3x+2y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -59x+7y=-232 \\ -12x+8y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -59x+7y=-232 & \cdot\ 2 \\ -3x+2y=3 & \cdot(-7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -118x+14y=-464 \\ 21x-14y=-21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -97x=-485 \\ -3x+2y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ -15+2y=3 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases}$$

β)

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η y = 9

46.

Αν η γωνία ω είναι οξεία με $ημω = \frac{3}{5}$, και η γωνία y είναι αμβλεία με $εφy = -\frac{3}{4}$,
να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = συνωημy + εφωσυνy$

Προτεινόμενη λύση

$ημ^2ω + συν^2ω = 1$ άρα $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + συν^2ω = 1$

$$\frac{9}{25} + συν^2ω = 1$$

$$συν^2ω = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \text{οπότε} \quad συνω = \pm\frac{4}{5}$$

Επειδή όμως η ω είναι οξεία δεκτή τιμή η $συνω = \frac{4}{5}$

Τότε είναι $εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

Ακόμα $εφy = -\frac{3}{4}$ άρα $\frac{ημy}{συνy} = -\frac{3}{4}$ οπότε $ημy = -\frac{3}{4}συνy$

Ο τύπος $ημ^2y + συν^2y = 1$ γίνεται $\left(-\frac{3}{4}συνy\right)^2 + συν^2y = 1$ άρα

$$\frac{9}{16}συν^2y + συν^2y = 1$$

$$25συν^2y = 16 \text{ συνεπώς}$$

$$συν^2y = \frac{16}{25} \quad \text{επομένως} \quad συνy = \pm\frac{4}{5}$$

Επειδή όμως η y είναι αμβλεία τελικά είναι $συνy = -\frac{4}{5}$

Εύκολα βρίσκουμε όπως προηγουμένως ότι $ημy = \frac{3}{5}$

Οπότε $A = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{25} - \frac{12}{20} = \frac{48}{100} - \frac{60}{100} = -\frac{12}{100} = -\frac{3}{25}$

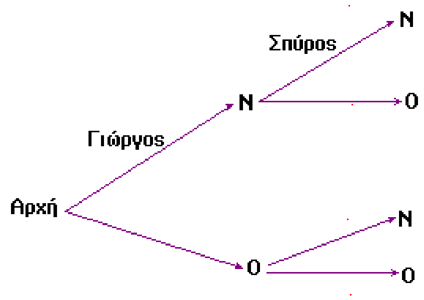
47.

Δύο μαθητές ο Γιώργος (Γ) και ο Σπύρος (Σ) ρωτήθηκαν, πρώτα ο Γιώργος και μετά ο Σπύρος, αν έχουν λύσει μία άσκηση.

α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

β) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :

- **i)** Ο Γιώργος έλυσε την άσκηση
- **ii)** Και οι δύο μαθητές έλυσαν την άσκηση
- **iii)** Ο Σπύρος δεν έλυσε την άσκηση



Προτεινόμενη λύση

α)

Από το διπλανό δεντροδιάγραμμα προκύπτει ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο

Ω = {ΝΝ , ΝΟ , ΟΝ , ΟΟ}

όπου Ν = λύθηκε η άσκηση

Ο = δεν λύθηκε η άσκηση

β)

i) Αν Γ είναι το ενδεχόμενο ο Γιώργος έλυσε την άσκηση ,

τότε Γ = { ΝΝ , ΝΟ }. Οπότε $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ii) Αν Σ είναι το ενδεχόμενο ο Σπύρος έλυσε την άσκηση

τότε Σ = {ΝΝ , ΟΝ}

Το ενδεχόμενο και οι δύο μαθητές έλυσαν την άσκηση είναι το $\Gamma \cap \Sigma$ = {ΝΝ}

Οπότε $P(\Gamma \cap \Sigma) = \frac{N(\Gamma \cap \Sigma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}$

iii) Ο Σπύρος δεν έλυσε την άσκηση είναι το ενδεχόμενο Σ΄= {ΝΟ , ΟΟ}

με $P(\Sigma') = \frac{N(\Sigma')}{N(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

48.

Να λυθούν οι εξισώσεις **α)** $(x + 1)^2 - (x-1)(x + 2) = -2x(x - 3)$

β) $(x^2-7x + 12)(4x^2 - 4x + 1) = 0$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$(x + 1)^2 - (x-1)(x + 2) = -2x(x - 3)$$
$$(x + 1)^2 - (x-1)(x + 2) + 2x(x - 3) = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 - (x^2 + 2x - x - 2) + 2x^2 - 6x = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + x + 2 + 2x^2 - 6x = 0$$
$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ με } \Delta = 1 \text{ και ρίζες } x = 1 \text{ ή } x = \frac{3}{2}$$

β)

$(x^2-7x + 12)(4x^2 - 4x + 1) = 0$ άρα $x^2-7x + 12 = 0$ ή $4x^2 - 4x + 1= 0$

Η πρώτη εξίσωση έχει Δ = 1 και ρίζες x = 3 ή x = 4

Η δεύτερη έχει Δ = 0 και δύο ρίζες ίσες με $\frac{1}{2}$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση έχει ρίζες τις x = 3 ή x = 4 ή $x = \frac{1}{2}$ (διπλή)

49.

Έστω η παράσταση $A = \dfrac{x-3}{4(x^2-3x+2)} - \dfrac{x-2}{x^2-4x+3} - \dfrac{x-1}{4(x^2-5x+6)}$

α) Να αναλυθούν οι παρονομαστές σε γινόμενο παραγόντων

β) Να βρείτε το ΕΚΠ των παρονομαστών

γ) Να εκτελεστούν οι πράξεις

δ) Να βρεθεί η τιμή του εξαγομένου για $x = \dfrac{1}{3}$

ε) Αν $A = 12$ να βρεθεί η τιμή του x.

Προτεινόμενη λύση

α)

$4(x^2-3x+2) = 2^2(x-2)(x-1)$, $x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$, $4(x^2-5x+6) = 2^2(x-3)(x-2)$

β)

ΕΚΠ $= 2^2(x-2)(x-1)(x-3) = 4(x-2)(x-1)(x-3)$

γ)

$$A = \frac{x-3}{4(x^2-3x+2)} - \frac{x-2}{x^2-4x+3} - \frac{x-1}{4(x^2-5x+6)} =$$

$$= \frac{x-3}{4(x-2)(x-1)} - \frac{x-2}{(x-3)(x-1)} - \frac{x-1}{4(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-3)^2}{4(x-2)(x-1)(x-3)} - \frac{4(x-2)^2}{4(x-3)(x-1)(x-2)} - \frac{(x-1)^2}{4(x-2)(x-3)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-3)^2-4(x-2)^2-(x-1)^2}{4(x-2)(x-1)(x-3)} =$$

$$= \frac{x^2-6x+9-4x^2+16x-16-x^2+2x-1}{4(x-2)(x-1)(x-3)} =$$

$$= \frac{-4x^2+12x-8}{4(x-2)(x-3)(x-1)} =$$

$$= \frac{-4(x^2-3x+2)}{4(x-2)(x-3)(x-1)} = \frac{-4(x-2)(x-1)}{4(x-2)(x-3)(x-1)} = \frac{-1}{x-3}$$

δ)

Αν $x = \dfrac{1}{3}$, το εξαγόμενο γίνεται $A = \dfrac{-1}{\frac{1}{3}-3} = \dfrac{-1}{-\frac{8}{3}} = \dfrac{3}{8}$

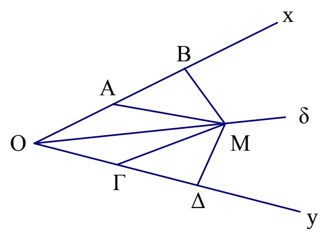
ε)

Αν $A = 12$ τότε $\dfrac{-1}{x-3} = 12$ άρα $-1 = 12x - 36$

$$12x = 35$$

$$x = \frac{35}{12}$$

50.
Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = ΟΓ , ΟΒ = ΟΔ
και Οδ διχοτόμος της γωνίας xΟy.
Να αποδείξετε ότι
α) ΑΒ = ΓΔ
β) Τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΟΜΔ είναι ίσα
γ) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα



Προτεινόμενη λύση

α)
ΟΒ = ΟΔ και ΟΑ = ΟΓ.
Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε ΟΒ – ΟΑ = ΟΔ – ΟΓ άρα ΑΒ = ΓΔ

β)
ΟΒ = ΟΔ , ΟΜ = ΟΜ και $B\hat{O}M = M\hat{O}\Delta$. Άρα με βάση το (Π – Γ– Π) τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΟΜΔ είναι ίσα.

γ)
Από την ισότητα των προηγουμένων τριγώνων είναι ΒΜ = ΜΔ
και $O\hat{B}M = O\hat{\Delta}M$
Επειδή ακόμα στο (α) δείξαμε ότι ΑΒ = ΓΔ , κατά το (Π – Γ– Π) τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΓΜΔ είναι ίσα.